УДК 517. 55

В. Ф. Милованов

О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ В ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ C^1

Интеграл типа Коши с фиксированной точкой в ядре исследуется в предположении, что фиксированная точка принадлежит внешности круга радиуса единица. Установлены области неаналитичности и области аналитичности исследуемого интеграла. Область неаналитичности естественным образом разбивается на две подобласти, в каждой из которых этот интеграл вычисляется по определенным формулам. Неаналитические функции, представимые интегралом типа Коши с фиксированной точкой в ядре удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям. С помощью метода линейных дифференциальных операторов установлена связь интегралов с фиксированной точкой в ядре с интегралом типа Коши.

The Cauchy-type integral with a fixed point in the kernel is in the assumption that fixed point is on the exterior of a circle of RADIUS one. Set fields non-analyticity and the analyticity of the integral. Area non-analyticity naturally splits into two subareas , each of which the integral is calculated according to a specific formula. Non-analytical functions, which have integral Cauchy type with a fixed point in the kernel satisfies a certain differential equations. Using the method of linear differential operators is link integrals with a fixed point in the kernel with integral Cauchy type.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, фиксированная точка, ядро, область аналитичности, область неаналитичности, линейный оператор.

Key words: integral Cauchy type, fixed point, the kernel, area analyticity, area *non-analyticity*, the linear operator.

В работе [1] получена обобщенная интегральная формула Коши в случае полной n-круговой области D. Пусть

$$z^{(1)}=(z_1^{(1)},\dots,z_n^{(1)}),\dots,z^{(i)}=(z_1^{(i)},\dots,z_n^{(i)}),\hat{z}^{(1)}=\hat{z}_1^{(1)},\dots,\hat{z}_n^{(1)}),\hat{z}^{(i)}=(\hat{z}_1^{(i)},\dots,\hat{z}_n^{(i)})\ -$$

фиксированные по произволу точки из области D.

Если функция $f(z)$ $(n \geqslant 2)$ аналитична в области D и функция $f(z)$ и все ее частные производные до порядка λ $(\lambda = 0, 1, 2, \dots)$ включительно непрерывны в $D \cup S$, то для $L = 0, 1, 2, \dots, \lambda$; $\hat{l} = 0, 1, 2, \dots$; $z \in D$

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \int\limits_{|\xi|=1} L_{1,n-1}^{n-1}(L_{\breve{A}\breve{b}Ab}^{\breve{l},-l}(\frac{1}{\xi-u}))\times L_{Ab\breve{A}\breve{b}}^{(l,-\breve{l})}(F_0(\xi, R, \theta))d\xi, \qquad (1)$$

где $u=(\tau\dfrac{1}{r_1(\tau)})z_v+(\dfrac{(1-\tau)}{r_v(\tau)}e^{-it}z_v^l..$

Эта формула выражает значения функции $f(z)$ в области D через значения интегро-дифференциального оператора $L_{Ab\breve{A}\breve{b}}^{l,-\breve{l}}(F_0(\xi, R, \theta))$ на S.

В случае поликруга справедливо аналогичное интегральное представление, если $r_\nu(\tau) = R$. На основе интегрального представления для поликруга можно построить интеграл типа Коши с фиксированными точками в ядре. Для случая одного комплексного переменного рассмотрим следующее определение.

Определение 1.1. Интегралом типа Коши с фиксированной точкой в ядре назовем интеграл вида

$$F^* = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \varepsilon^{\gamma-1} d\varepsilon \int_{|\eta|=1} \frac{f(\eta)}{\eta - u} d\eta, \tag{2}$$

где $u = \varepsilon^\delta z + (1-\varepsilon^\delta) z_0, z_0 \in D^-$, а функция $f(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица.

Для функций двух комплексных переменных интеграл с фиксированной точкой в ядре изучался в работе [2]. Рассмотрены свойства аналитичности и неаналитичности этих интегралов в единичном бицилиндре. Также исследован интеграл в зависимости от поведения фиксированной точки в пространстве C^2. Изучение интеграла типа Коши с фиксированной точкой в ядре для функций одного комплексного переменного проводилось в работах [3] и [4]. В данной статье интеграл типа Коши с фиксированной точкой в ядре исследуется в предположении, что точка $z_0 \in D^-$ = {|z|>1}. Установлены области неаналитичности и области аналитичности исследуемого интеграла. Область неаналитичности естественным образом разбивается на две подобласти D+ и D*. Неаналитические функции F и F^*, представимые интегралом типа Коши с фиксированной точкой в ядре в областях D^+ и D^*, удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям. С помощью метода линейных дифференциальных операторов [5] установлена связь интегралов с фиксированной точкой в ядре с интегралом типа Коши.

Интеграл F^* в областях D^+ = {|z|<1} и D*,

$$D^* = \{\frac{|z||z_0|\cos\alpha - |z_0|^2}{|z - z_0|} > \sqrt{|z_0|^2 - 1}\}, -$$

неаналитическая функция, а в области $K = C^1 \setminus (D^+ + \bigcup D^*)$ – аналитическая, при этом имеют место следующие формулы:

$$F' = \int_0^{\varepsilon_2} \varepsilon^{\gamma-1} f^-(u) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2}^1 \varepsilon^{\gamma-1} f^+(u) d\varepsilon,$$

если

$$F' = \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon^{\gamma-1} f^-(u) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varepsilon^{\gamma-1} f^+(u) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_2}^1 \varepsilon^{\gamma-1} f^-(u) d\varepsilon,$$

если $z \in D^*, z_0 \in D^-$, где

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\eta)}{\eta - u} d\eta = \begin{cases} f^+(u), |u| < 1 \\ f^-(u), |u| > 1 \end{cases}, u = \varepsilon^\delta z + (1-\varepsilon^\delta) z_0,$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{|z||z_0|\cos\alpha - |z_0|^2 - \sqrt{(|z||z_0||\cos\alpha - |z_0||^2)^2 - (|z_0|^2 - 1)|z - z_0|^2}}{|z - z_0|}\right)^{1/\delta},$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{|z||z_0|\cos\alpha - |z_0|^2 + \sqrt{(|z||z_0||\cos\alpha - |z_0||^2)^2 - (|z_0|^2 - 1)|z - z_0|^2}}{|z - z_0|}\right)^{1/\delta}.$$

Интеграл (2) с фиксированной точкой в ядре связан с интегралом типа Коши соотношением

$$\gamma F^* + \delta(z - z_0)F_z^* + \delta(\overline{z} - \overline{z}_0)\,\mathrm{F}_{\overline{z}}^* = f^+(z).$$

Список литературы

1. *Баврин И.И.* Операторы в выпуклых областях и интегральные представления // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 215, № 4. С. 769—771.

2. *Милованов В.Ф.* О некоторых интегральных представлениях с фиксированной точкой // Математический анализ и теория функций : республиканский сб. трудов. 1978. Вып. 9. С. 54—64.

3. *Нелаев А.В.* К теории квазианалитических функций // Там же. 1974. Вып. 4. С. 49— 55.

4. *Гуляев А.В.* О свойствах интегралов Коши — Баврина // Там же. 1976. Вып. 6. С. 45—61.

5. *Хвостов А.Т.* Исследование поведения интегралов типа Темлякова методом однородных дифференциальных операторов первого порядка // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 186, № 3. С. 522—525.

Об авторе

Владимир Федорович Милованов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: wfmil1@mail.ru

About the author

Dr Vladimir Milovanov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: wfmil1@mail.ru